

УДК 539.21

## РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ У ДЕФОРМИРУЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕКОГЕРЕНТНОГО КЛИНОВИДНОГО ОСТАТОЧНОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ДВОЙНИКА

**Ю. С. КРОТЕНОК, О. М. ОСТРИКОВ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

### Введение

Механическое двойникование представляет собой закономерную переориентацию кристаллической решетки под действием механической нагрузки. Атомная перестройка кристаллической решетки при двойниковании происходит с соблюдением определенных кристаллографических соотношений, при этом атомы в соседних плоскостях перемещаются на расстояния, равные долям параметра решетки [1].

Проблема разрушения материалов, неоднократно рассмотренная для различных условий механических испытаний, представляет собой сложный комплекс научных и технических вопросов. Это обусловлено, прежде всего, тем, что разрушение – «процесс кинетический, статистический, многостадийный и многомасштабный» [1]. Одной из наиболее важных стадий в развитии разрушения является стадия накопления повреждений, на которой имеет место дислокационное формирование зародышевой микротрещины [1]. Активную роль в зарождении трещин играет механическое двойникование, которое приводит к концентрации высокого уровня напряжений на границах раздела «двойник – материнский материал», создающих благоприятные условия для образования трещин. Механизмы, вызывающие разрушение при двойниковании, в настоящее время выяснены еще недостаточно [1], [2]. Поэтому разработка методов расчета напряженно-деформированного состояния двойникующихся материалов является актуальной.

Целью данной работы является синтез математической модели для расчета и графической визуализации нормальных компонент напряжений в деформируемом твердом теле при наличии в нем двойника.

### Постановка задачи

На рис. 1 схематически представлен клиновидный двойник у поверхности двойникующегося материала. Длина двойника –  $L$ , а его ширина у устья –  $H$ . Форму границ опишем функциями  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$ . Направим ось  $X$  вдоль поверхности кристалла, а ось  $Y$  перпендикулярно ей, вдоль направления развития двойника.

Пусть поверхность деформируется в точке  $O$  вдоль оси  $Y$  сосредоточенной нормальной нагрузкой  $P$ , перпендикулярной поверхности, и тангенциальной сосредоточенной нагрузкой  $Q$ . Тогда в упругом полупространстве будут действовать нормальные напряжения, которые могут быть определены по формулам [2], [3]:

$$\sigma_{xx}^e(x, y) = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{x^2(P+Q)}{(x^2 + y^2)^2} \right);$$

$$\sigma_{yy}^e(x, y) = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{y^2(P+Q)}{(x^2 + y^2)^2} \right). \quad (1)$$

Напряжения, создаваемые клиновидным двойником, можно рассчитать из соотношения [2]:

$$\sigma_{ij}^{(nw)}(x, y) = \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(2)}(x, y), \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y)$  и  $\sigma_{ij}^{(2)}(x, y)$  – напряжения, которые, как это было показано в [2], создаются каждой границей двойника и определяются с помощью криволинейных интегралов:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \int_{L_{A1}} \rho_1 \sigma_{ij}^{(1,0)} ds; \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \int_{L_{A2}} \rho_2 \sigma_{ij}^{(2,0)} ds, \quad (4)$$

где  $L_{A1}$  и  $L_{A2}$  – профили двойниковых границ;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности двойникующих дислокаций на двойниковых границах;  $\sigma_{ij}^{(1,0)}$  и  $\sigma_{ij}^{(2,0)}$  – определяются из соотношений, приведенных в [2].

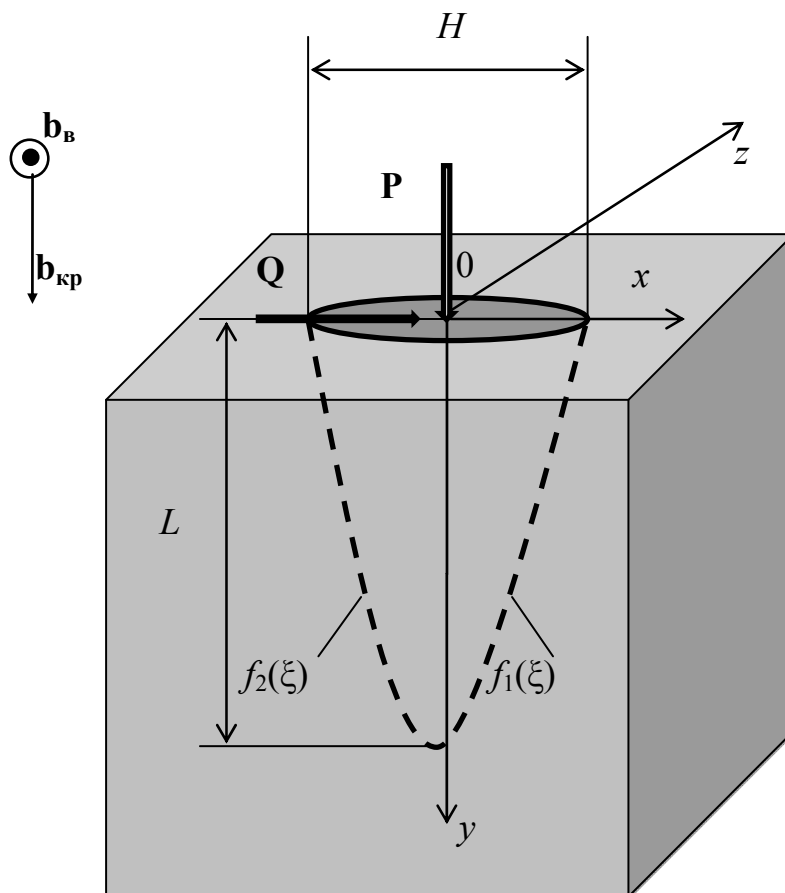


Рис. 1. Схематичное объемное изображение клиновидного двойника у деформируемой сосредоточенной нагрузкой поверхности твердого тела

Двойникующие дислокации являются частичными дислокациями Шокли [4], [5]. Поэтому их вектор Бюргерса  $b$  можно разложить на винтовую  $b_v$  и краевую  $b_{кр}$  составляющие, направление которых примем таким, как это показано на рис. 1. Тогда выражения (3) и (4) можно свести к определенным интегралам вида [2]:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, \xi) d\xi; \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, \xi) d\xi. \quad (6)$$

Здесь  $\xi$  – параметр интегрирования.

При фиксированных источниках внутренних напряжений в упругом полупространстве справедлив принцип суперпозиции, согласно которому результирующие напряжения в деформируемом сосредоточенной нагрузкой полупространстве при наличии у поверхности двойника, могут быть найдены по следующей формуле:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^e(x, y) + \sigma_{ij}^{(nv)}(x, y). \quad (7)$$

При рассмотрении случая прямолинейных двойниковых границ, как это было показано в [2], функции  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  будут иметь вид:

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right), \quad (8)$$

$$f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{L} \right). \quad (9)$$

### Результаты и их обсуждение

Рассмотрим распределение нормальных компонент  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  тензора напряжений при следующих схемах деформирования поверхности сосредоточенной нагрузкой: 1)  $P = 0$ ;  $Q = 0$  (рис. 2); 2)  $P = 100$  Н;  $Q = 0$  (рис. 3 и 6); 3)  $P = 0$ ;  $Q = 100$  Н (рис. 4 и 7); 4)  $P = 50$  Н;  $Q = 50$  Н (рис. 5 и 8). Примем:  $H = 19$  мкм;  $L = 100$  мкм;  $b_{кр} = 0,124$  нм, где  $b_{кр}$  – модуль краевой составляющей вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации; для железа:  $a = 0,248$  нм [2] (здесь  $a$  – межатомное расстояние).

Линейная плотность двойникующих дислокаций на двойниковых границах определяется по формуле [2]:

$$\rho = \frac{H}{2aL}. \quad (10)$$

Тогда получим:  $\rho = 3,9 \cdot 10^8 \text{ м}^{-1}$ . В (5) и (6) примем этот параметр постоянным.

На рис. 2 показано распределение нормальных компонент тензора напряжений у клиновидного двойника при отсутствии внешней силы ( $P = 0$ ;  $Q = 0$ ). Наблюдается симметричная конфигурация полей напряжений. При этом  $\sigma_{yy}$  положительны у одной из границ двойника и отрицательны – у другой. Локализация напряжений происходит у вершины и на границах двойника. Внутри двойника напряжения неодно-

родны и максимальное значение достигают у вершины. Область сжатия и растяжения у вершины двойника наблюдается в случае напряжений  $\sigma_{xx}$ . Эти напряжения знакопеременны по отношению к оси  $OY$ .

В случае действия на поверхность нормальной сосредоточенной нагрузки  $P = 100$  Н (рис. 3) при наличии клиновидного двойника с некогерентными границами ситуация меняется. Существенное искажение получают нормальные напряжения  $\sigma_{xx}$  (рис. 3, а). Локализация напряжений  $\sigma_{yy}$  происходит в месте действия силы, где оно имеет отрицательное значение напряжений, повышается общий уровень сдвиговых напряжений у двойниковой границы, а максимальное значение достигается у вершины двойника (рис. 3, б). Наблюдается несимметричная конфигурация полей напряжений, с положительной областью справа от двойника и отрицательной – слева.

При действии на поверхность сосредоточенной касательной силы  $Q = 100$  Н при наличии клиновидного двойника (рис. 4) напряжения  $\sigma_{yy}$  также локализуются в области действия сосредоточенной нагрузки с образованием двух участков положительных и отрицательных напряжений (рис. 4, б). Искажения напряжений  $\sigma_{xx}$  в этом случае меньше, чем при действии на поверхность нормальной сосредоточенной нагрузки (рис. 4, а).

На рис. 5 приведены результаты расчета распределения напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  при  $P = 50$  Н;  $Q = 50$  Н. Напряжения  $\sigma_{yy}$  достигают максимального значения в месте действия сосредоточенной нагрузки (рис. 5, б). При этом данные напряжения уменьшили свои значения с удалением от устья двойника. Распределение напряжений  $\sigma_{xx}$  имеет особенность у вершины двойника, где наблюдается область чередования сжатия и растяжения (рис. 5, а).

При сравнении полученных результатов с классическими расчетами полей напряжений в упругом полупространстве, деформируемом сосредоточенной нагрузкой при отсутствии у поверхности двойника (рис. 6, 7, 8), становится очевидным, что наличие двойникования способствует концентрации высокого уровня напряжений вдали от поверхности, где с позиций классических представлений локализации напряжений быть не должно. Отсутствие учета напряжений, обусловленных двойникованием, приводит к ошибкам расчетов. А так как локализация напряжений на двойниковых границах может приводить к образованию трещин, то использование классических методов расчета напряженно-деформируемого состояния, обусловленного сосредоточенной нагрузкой, в случае двойникующихся материалов приводит к непрогнозируемому разрушению, что нежелательно в случае технических систем, к которым предъявляются высокие требования к степени надежности.

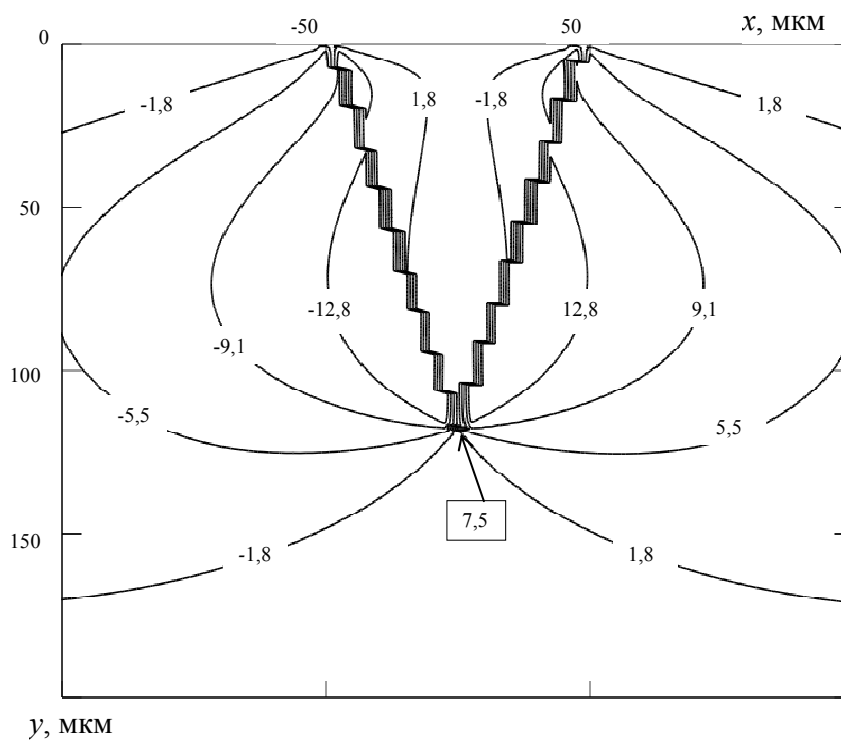
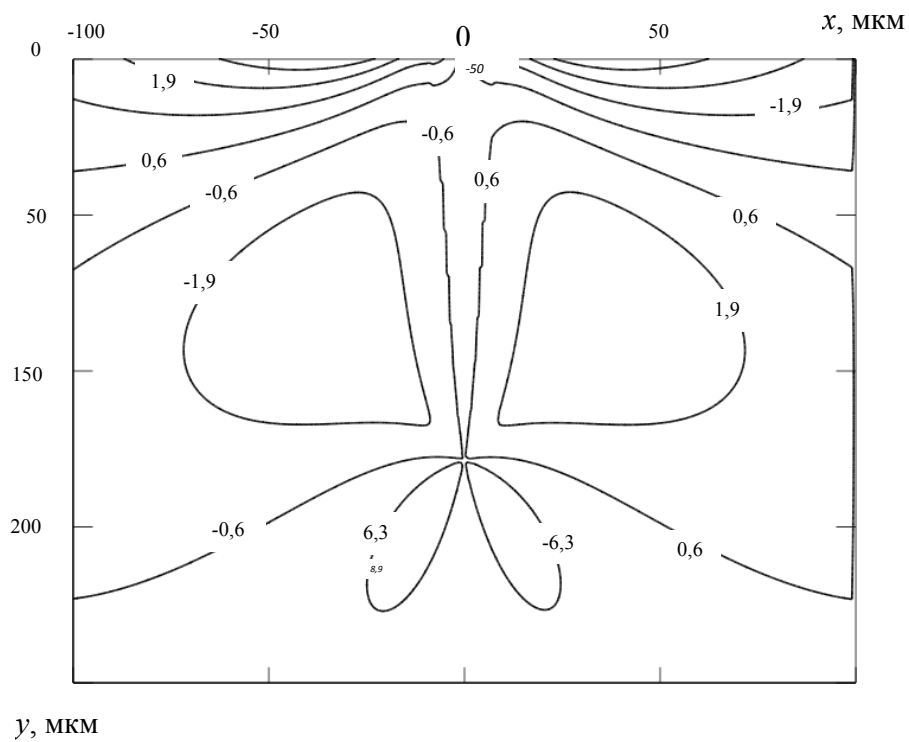
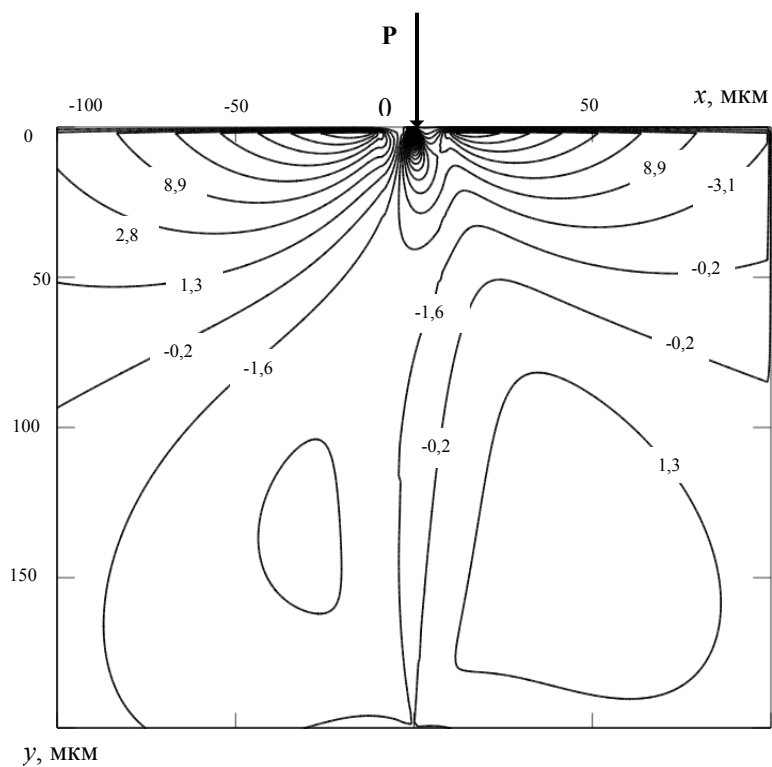
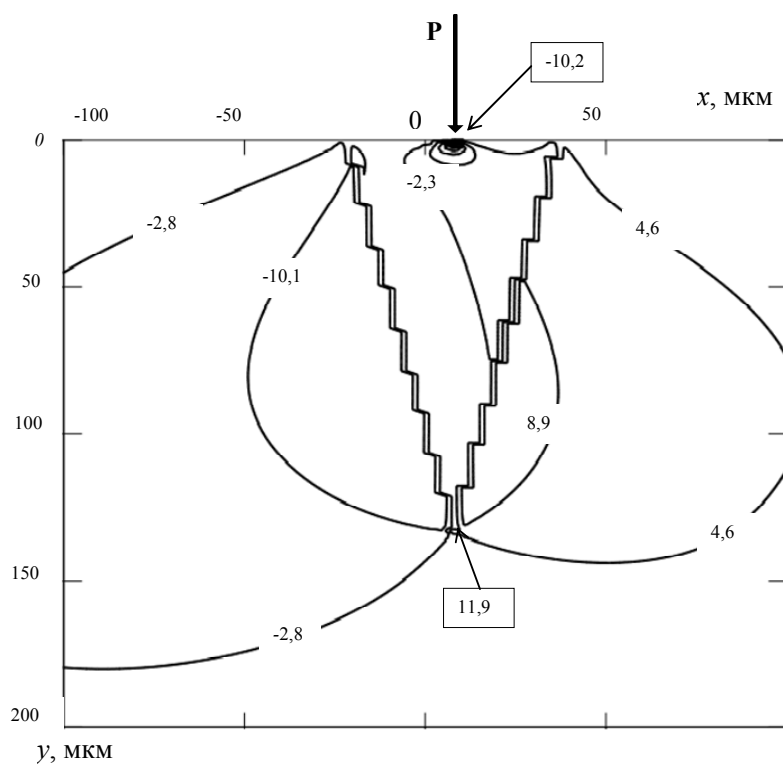


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений у клиновидного двойника, находящегося у недеформируемой поверхности:

$a - \sigma_{xx}$  (МПа);  $b - \sigma_{yy}$  (МПа)



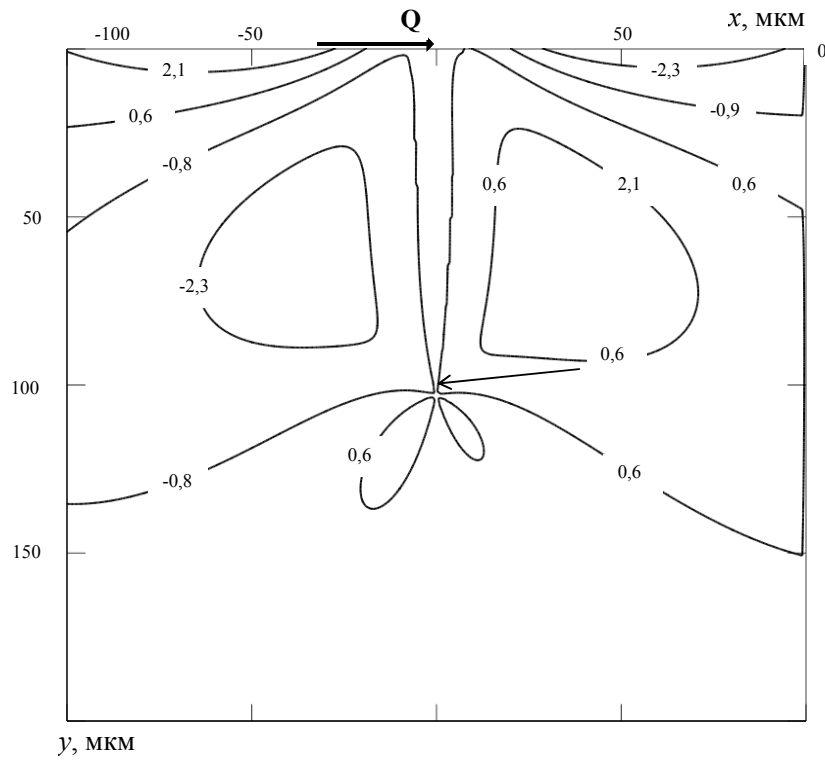
а)



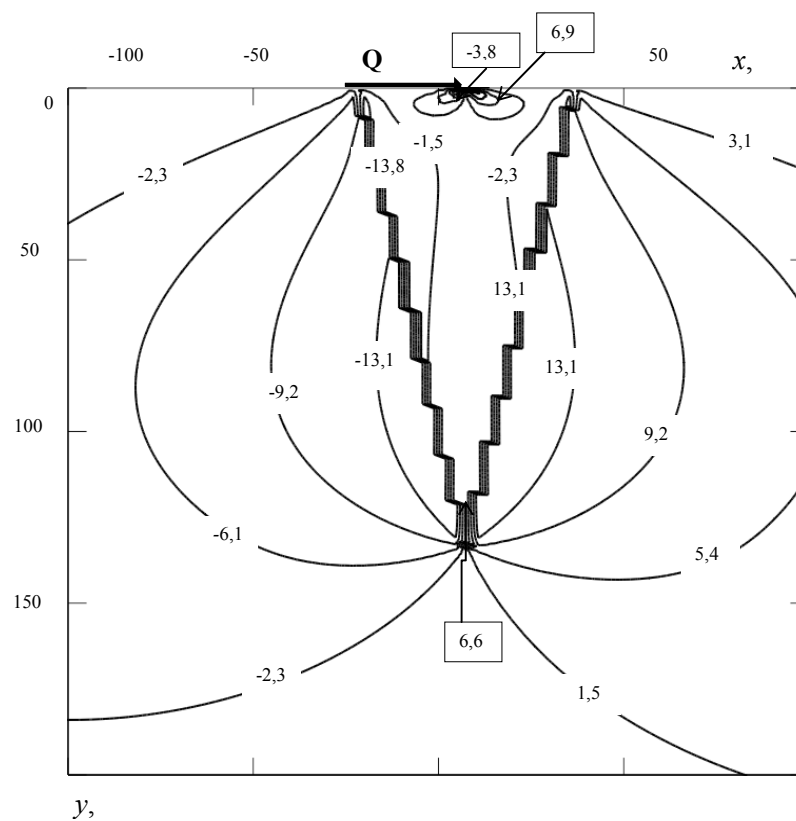
б)

Рис. 3. Распределение нормальных напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности, деформируемой нормальной сосредоточенной нагрузкой  $P$ :

$a - \sigma_{xx}$  (МПа);  $b - \sigma_{yy}$  (МПа)



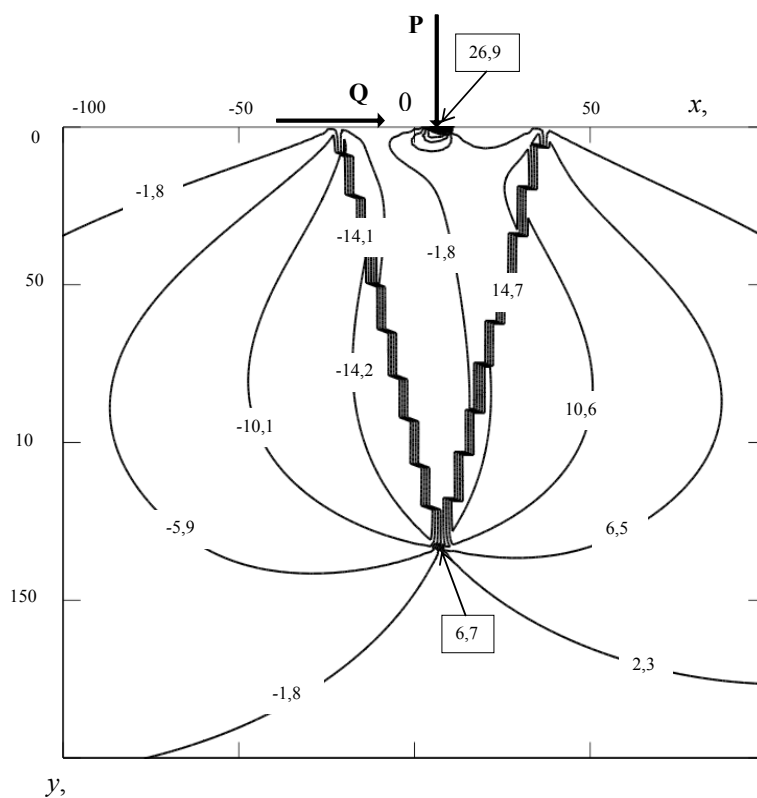
a)



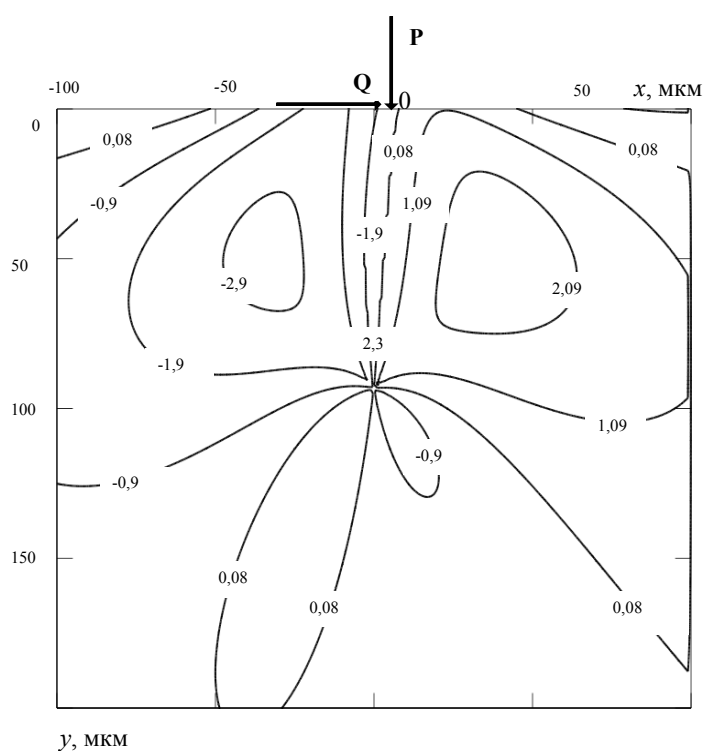
б)

Рис. 4. Распределение нормальных напряжений у клиновидного двойника, находящегося у поверхности, деформируемой касательной сосредоточенной нагрузкой  $Q$ :

$a - \sigma_{xx}$  (МПа);  $б - \sigma_{yy}$  (МПа)



a)



б)

Рис. 5. Распределение напряжений у клиновидного двойника при действующей в точке  $O$  сосредоточенной нормальной нагрузки  $P$  и сосредоточенной касательной нагрузки  $Q$ :

$a - \sigma_{yy}$  (МПа);  $б - \sigma_{xx}$  (МПа)



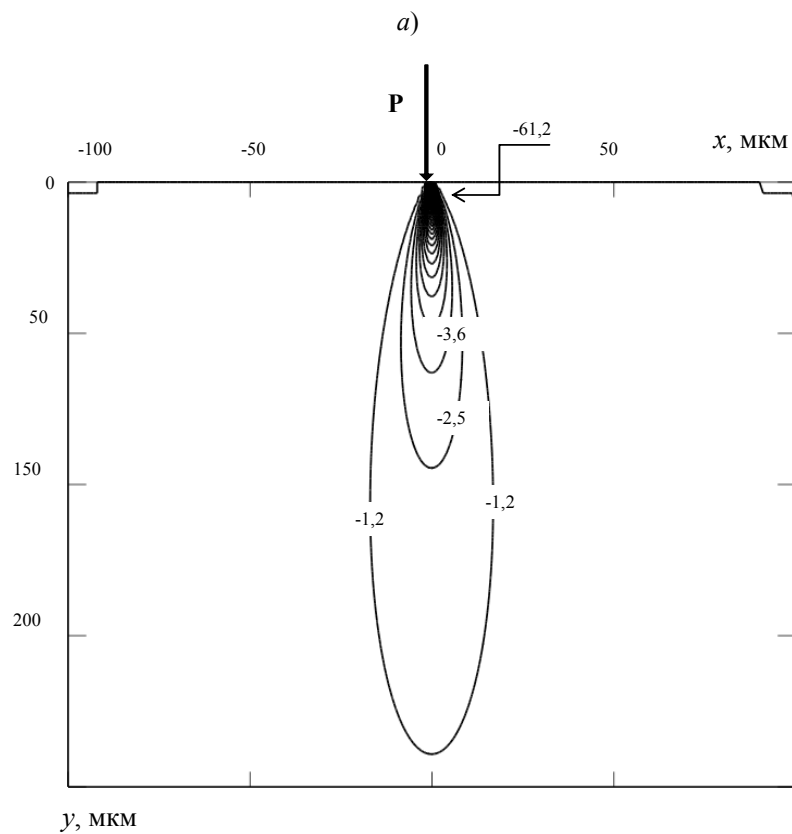
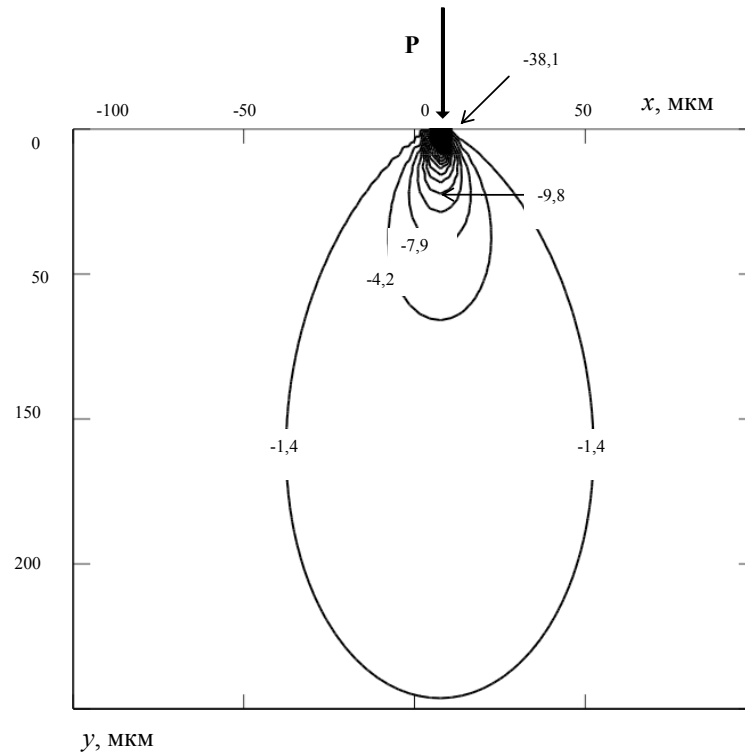


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений у поверхности, деформируемой нормальной сосредоточенной нагрузкой  $P$ :

$a - \sigma_{yy}$  (МПа);  $b - \sigma_{xx}$  (МПа)

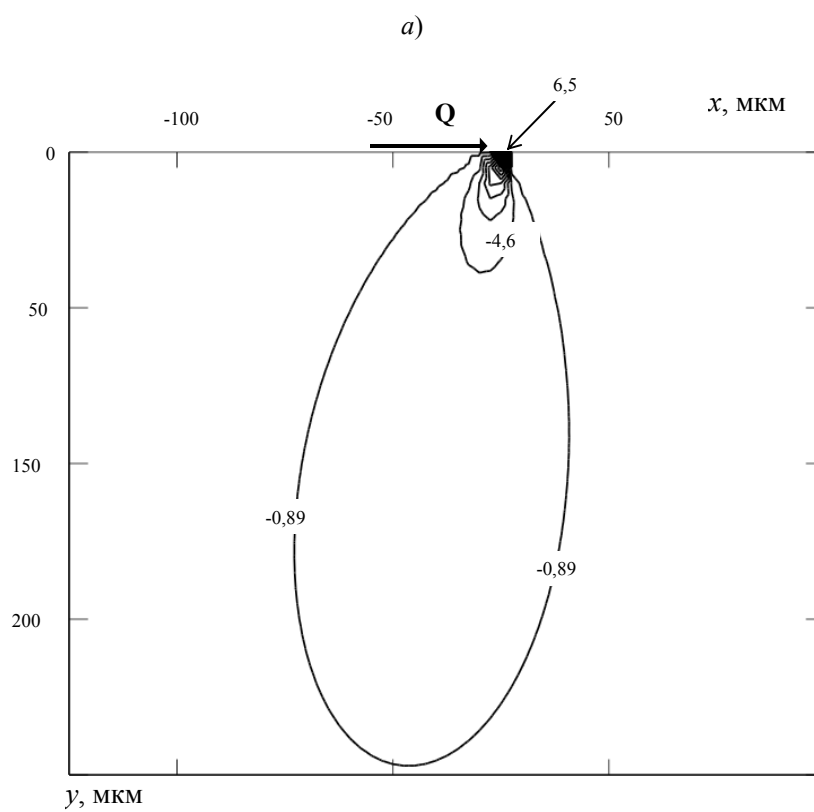
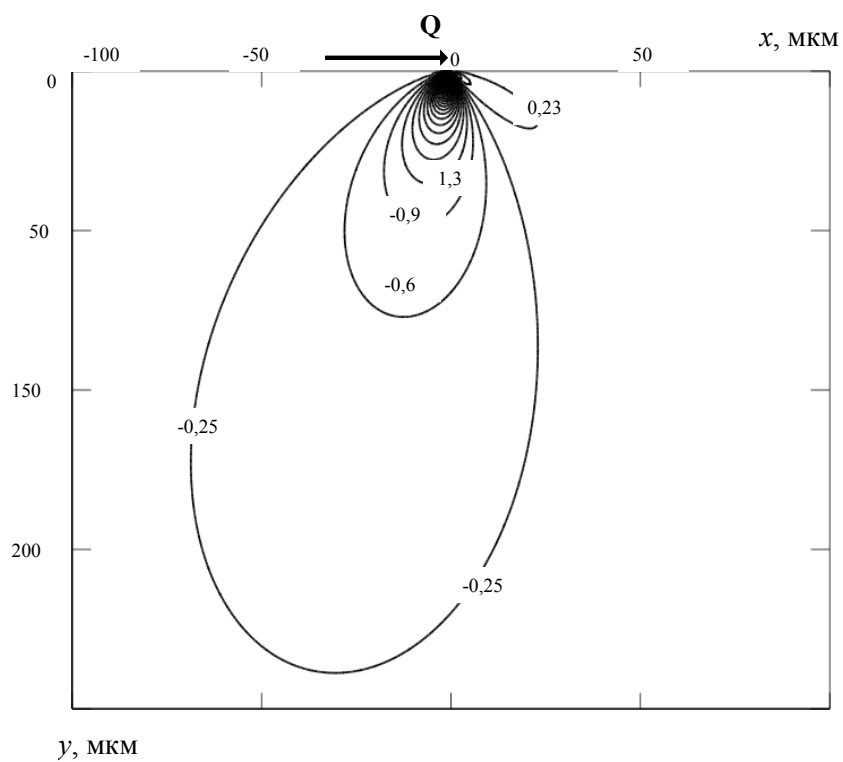
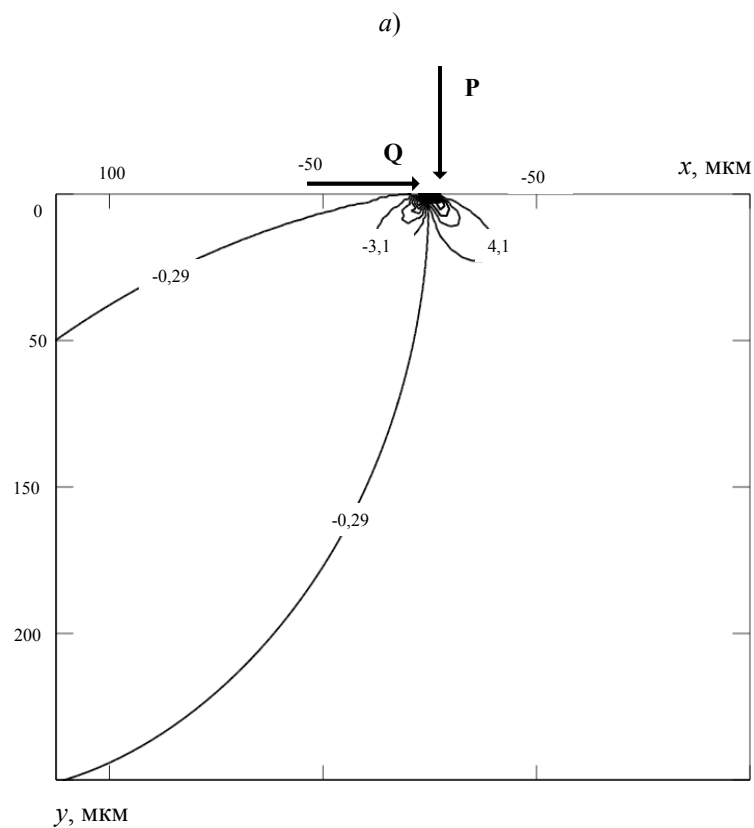
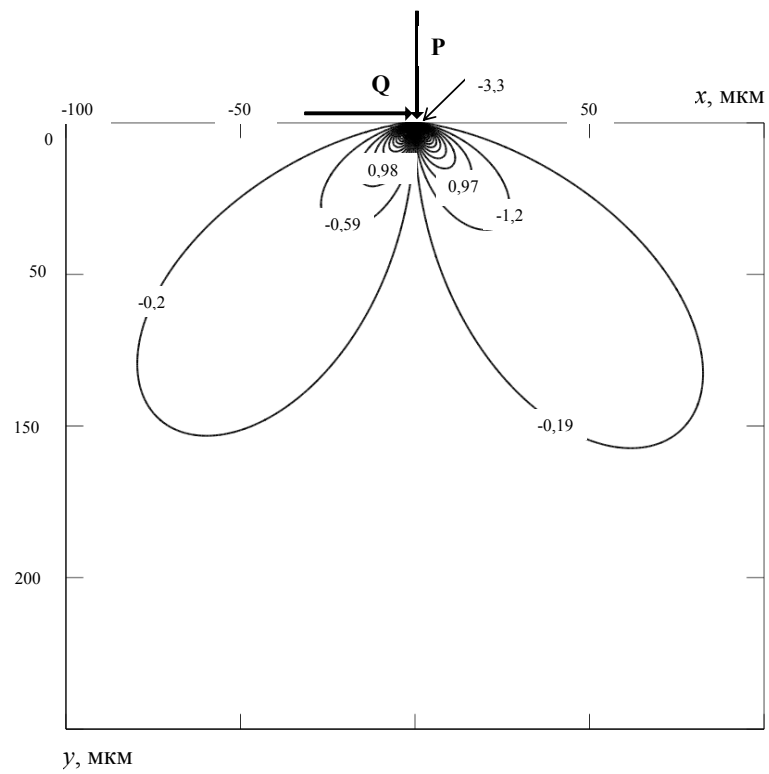


Рис. 7. Распределение напряжений у поверхности, деформируемой сосредоточенной касательной нагрузкой  $Q$ :

$a - \sigma_{yy}$  (МПа);  $б - \sigma_{xx}$  (МПа)



б)

Рис. 8. Распределение напряжений у поверхности, деформируемой сосредоточенной нормальной нагрузкой  $P$  и сосредоточенной касательной нагрузкой  $Q$ :

$a - \sigma_{yy}$  (МПа);  $b - \sigma_{xx}$  (МПа)

**Заключение**

В результате разработан метод расчета нормальных компонент тензора напряжений в деформируемом сосредоточенной нагрузкой твердом теле при наличии в нем остаточного двойника с некогерентными границами. Проведенные расчеты показали, что локализация нормальных компонент тензора напряжений происходит в месте действия сосредоточенных сил, что ведет к потере симметрии в конфигурации полей напряжений у клиновидного двойника по сравнению со случаем отсутствия действия внешних сил. Установлено, что наличие двойника в деформируемом упругом полупространстве приводит к концентрации опасных в плане разрушения напряжений в непрогнозируемых классическими методами областях.

**Литература**

1. Федоров, В. А. Дислокационные механизмы разрушения двойникующихся материалов / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин, В. А. Тялина. – М. : Машиностроение, 2004. – 215 с.
2. Остриков, О. М. Механика двойникования твердых тел / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
3. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
4. Судзуки, Т. Динамика дислокаций и пластичность / Т. Судзуки, Х. Есинага, С. Такеути ; пер. с яп. – М. : Мир, 1989. – 296 с.
5. Новиков, И. И. Кристаллография и дефекты кристаллической решетки / И. И. Новиков, К. М. Розин. – М. : Металлургия, 1990. – 336 с.

*Получено 20.12.2013 г.*